

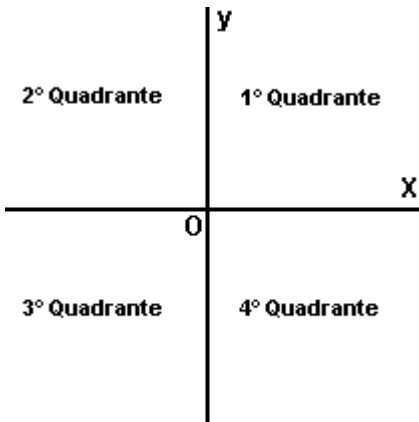
IL PIANO CARTESIANO

COORDINATE CARTESIANE NEL PIANO

Due rette incidenti e perpendicolari, dette asse “X” e asse “Y”, dotate di un sistema di riferimento “OX” e “OY” dal punto di intersezione “O” costituiscono un Sistema di riferimento cartesiano ortogonale “XOY”.

L’asse orizzontale si dice Asse “X” o delle Ascisse, mentre quello verticale si dice Asse “Y” o delle Ordinate.

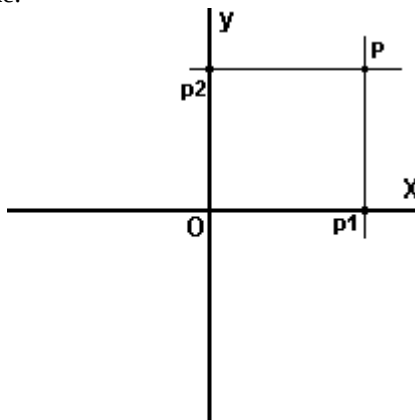
I due assi dividono il piano in quattro quadranti, i punti del piano appartenenti ai vari quadranti hanno coordinate positive o negative secondo lo schema che segue:



	Ascissa	Ordinata
1° Quadr.	+	+
2° Quadr.	-	+
3° Quadr.	-	-
4° Quadr.	+	-

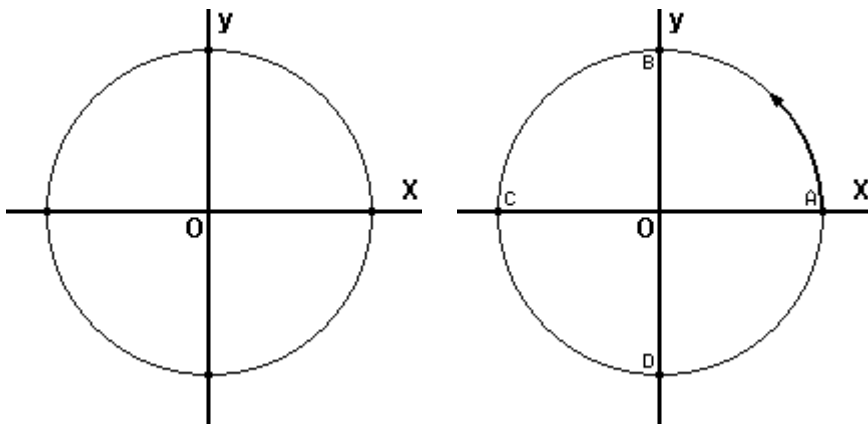
Dato un punto “P” qualsiasi sulla superficie del piano, le rette parallele agli assi che conducono ai punti “P1” sull’ascissa e “P2” sull’ordinata, prendono il nome di Coordinate Cartesiane e sono univoche per quel solo punto.

Pertanto ad ogni punto del piano rimane associata una Coppia Ordinata di numeri reali che ne indica la posizione.



CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

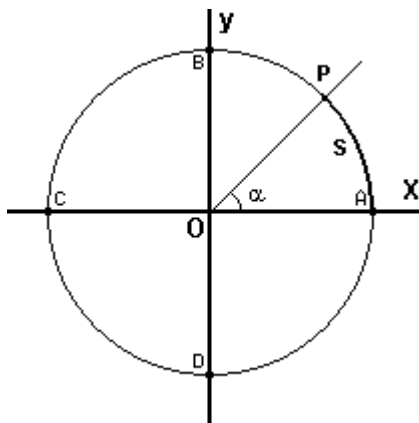
Fissato un riferimento “XOY”, si dice Circonferenza Goniometrica la circonferenza “ γ ” avente per centro l’origine “O”, raggio uguale a 1 e lunghezza uguale a 2π .



Il punto “A” di intersezione della circonferenza con il semiasse positivo delle ascisse è detto Origine degli archi, che si suppongono orientati positivamente secondo il Verso antiorario.

Ogni punto “P” sulla circonferenza ne determina un arco “S” posto tra “A” e “P”, mentre il vertice “AOP” ne racchiude l’angolo “ α ”.

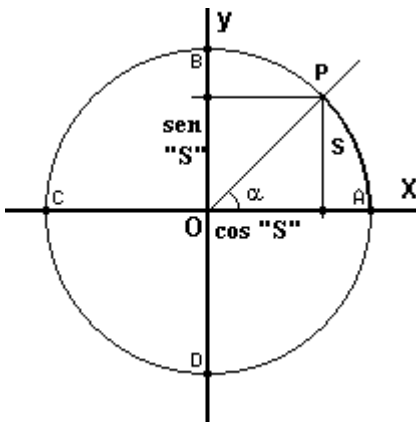
Viceversa ogni angolo “ α ” può essere traslato con il vertice in “O” e un lato coincidente con l’asse delle ascisse.



FUNZIONI GONIOMETRICHE SENO E COSENO

SENO DI UN ANGOLO

Per ogni punto “P” appartenente alla circonferenza “ γ ”, l’ordinata di “P” viene detta seno di “S” e si indica con “sen S”. Poiché “S” racchiude l’angolo “AOP” detto angolo “ α ”, si dice che “sen S” è il Seno dell’angolo “ α ”.



Allo stesso modo l’ascissa di “P” viene detta Coseno di “S”, si indica con “cos S” e ugualmente si dirà che “cos S” è il Coseno dell’angolo “ α ”.

PRIMA RELAZIONE FONDAMENTALE.

Si è visto che:

$$X = \cos S \quad \text{e} \quad Y = \sin S$$

sono l’ascissa e l’ordinata dei punti della circonferenza goniometrica. Poiché essa ha equazione:

$$X^2 + Y^2 = 1$$

ne consegue che “sen S” e “cos S” verificano la relazione:

$$\sin^2 S + \cos^2 S = 1$$

che è detta Prima Relazione Fondamentale della Goniometria.

Ricavando $\cos^2 S$ dalla formula precedente si ottiene:

$$\cos^2 S = 1 - \sin^2 S$$

da cui si ha:

$$\text{se } \cos S > 0 \quad \cos S = \sqrt{1 - \sin^2 S} \quad (\text{quadranti 1 e 4})$$

$$\text{se } \cos S < 0 \quad \cos S = -\sqrt{1 - \sin^2 S} \quad (\text{quadranti 2 e 3})$$

Viceversa, ricavando dalla relazione fondamentale $\sin^2 S$ si ha:

$$\sin^2 S = 1 - \cos^2 S$$

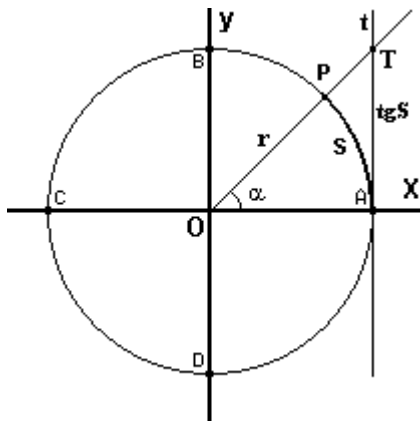
da cui si ottiene:

$$\text{se } \sin^2 S > 0 \quad \sin S = \sqrt{1 - \cos^2 S} \quad (\text{quadranti 1 e 2})$$

$$\text{se } \sin^2 S < 0 \quad \sin S = -\sqrt{1 - \cos^2 S} \quad (\text{quadranti 3 e 4})$$

TANGENTE DI UN ANGOLO

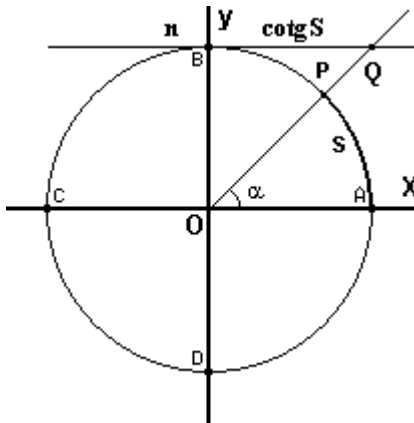
Sia dato un punto “P” sulla circonferenza “ γ ” e sia “t” la retta verticale passante per “A”: se la retta “r” passante per “O” e per “P” interseca “t”, l’ordinata del punto di intersezione “T” viene detta Tangente di S e si scrive “tg S”



È evidente che la retta “r” interseca “t” soltanto se non è verticale, il che avviene se “P” coincide con uno dei punti “B” o “D”.

COTANGENTE DI UN ANGOLO

Sia dato un punto “P” sulla circonferenza “ γ ” e sia “n” la retta orizzontale passante per “B”; se la retta “r” passante per “O” e per “P” interseca “n”; l’ascissa del loro punto di intersezione “Q” viene detta Cotangente di S e si indica con “ctg S” oppure “cotg S”.



È evidente che la retta “r” interseca “n” soltanto se non è orizzontale, il che avviene quando “P” coincide con uno dei punti “A” o “C”.

RELAZIONI TRA LE FUNZIONI GONIOMETRICHE

È possibile per ogni valore di “S” esprimere i quattro numeri “senS”, “cosS”, “tgS”, “ctgS” in funzione di uno solo di essi, che si suppone noto. Le relazioni variano a secondo del quadrante in qui si trovi il punto “P” estremo dell’arco “A - P = S”. Come abbiamo visto, se “P” appartiene al primo quadrante, dalla Relazione Fondamentale risulta:

$$\cos S = \sqrt{1 - \text{sen}^2 S}$$

mentre per un altro valore di “S”, tale che “P” appartenga al terzo quadrante risulta:

$$\cos S = -\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}$$

Si possono schematizzare ora i vari casi mediante quattro tabelle, che forniscono immediatamente le espressioni delle varie funzioni goniometriche mediante una sola di esse.

Noto il valore di sen S:

S	sen S	cos S	tg S	cotg S
1° Quadrante	+	$\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}$	$\frac{\text{sen } S}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}$	$\frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}{\text{sen } S}$
2° Quadrante	+	$-\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}$	$\frac{\text{sen } S}{-\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}$	$\frac{-\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}{\text{sen } S}$
3° Quadrante	-	$-\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}$	$\frac{\text{sen } S}{-\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}$	$\frac{-\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}{\text{sen } S}$
4° Quadrante	-	$\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}$	$\frac{\text{sen } S}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}$	$\frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 S}}{\text{sen } S}$

Noto il valore di cos S:

S	sen S	cos S	tg S	cotg S
1° Quadrante	$\sqrt{1 - \cos^2 S}$	+	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 S}}{\cos S}$	$\frac{\cos S}{\sqrt{1 - \cos^2 S}}$
2° Quadrante	$\sqrt{1 - \cos^2 S}$	-	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 S}}{\cos S}$	$\frac{\cos S}{\sqrt{1 - \cos^2 S}}$
3° Quadrante	$-\sqrt{1 - \cos^2 S}$	-	$\frac{-\sqrt{1 - \cos^2 S}}{\cos S}$	$\frac{\cos S}{-\sqrt{1 - \cos^2 S}}$
4° Quadrante	$-\sqrt{1 - \cos^2 S}$	+	$\frac{-\sqrt{1 - \cos^2 S}}{\cos S}$	$\frac{\cos S}{-\sqrt{1 - \cos^2 S}}$

Noto il valore di tg S e tenendo conto che:

$$\text{sen}^2 S = \frac{\text{sen}^2 S}{1} = \frac{\text{sen}^2 S}{\text{sen}^2 S + \cos^2 S} = \frac{\frac{\text{sen}^2 S}{\cos^2 S}}{\frac{\text{sen}^2 S}{\cos^2 S} + 1} = \frac{\text{tg}^2 S}{\text{tg}^2 S + 1}$$

e analogamente:

$$\cos^2 S = \frac{\cos^2 S}{1} = \frac{\cos^2 S}{\text{sen}^2 S + \cos^2 S} = \frac{1}{\frac{\text{sen}^2 S}{\cos^2 S} + 1} = \frac{1}{\text{tg}^2 S + 1}$$

si ha la tabella:

S	sen S	cos S	tg S	cotg S
1° Quadrante	$\frac{tgS}{\sqrt{1+tg^2 S}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 S}}$	+	$\frac{1}{tgS}$
2° Quadrante	$\frac{tgS}{-\sqrt{1+tg^2 S}}$	$\frac{1}{-\sqrt{1+tg^2 S}}$	-	$\frac{1}{tgS}$
3° Quadrante	$\frac{tgS}{-\sqrt{1+tg^2 S}}$	$\frac{1}{-\sqrt{1+tg^2 S}}$	+	$\frac{1}{tgS}$
4° Quadrante	$\frac{tgS}{\sqrt{1+tg^2 S}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2 S}}$	-	$\frac{1}{tgS}$

Noto il valore di cotg S e tenuto conto che:

$$\text{sen}^2 S = \frac{\text{sen}^2 S}{1} = \frac{\text{sen}^2 S}{\text{sen}^2 S + \cos^2 S} = \frac{1}{1 + \cot^2 S}$$

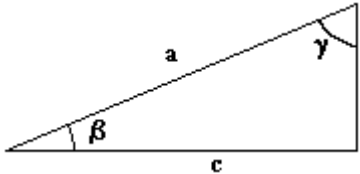
e analogamente:

$$\cos^2 S = \frac{\cos^2 S}{1} = \frac{\cos^2 S}{\text{sen}^2 S + \cos^2 S} = \frac{\cot^2 S}{\cot^2 S + 1}$$

si ha la tabella:

S	sen S	cos S	tg S	cotg S
1° Quadrante	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{\cot S}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{1}{\cot S}$	+
2° Quadrante	$\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{\cot S}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{1}{\cot S}$	-
3° Quadrante	$\frac{-1}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{-\cot S}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{1}{\cot S}$	+
4° Quadrante	$\frac{-1}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{-\cot S}{\sqrt{1+\cot^2 S}}$	$\frac{1}{\cot S}$	-

Tabella riassuntiva delle formule goniometriche del triangolo rettangolo

	$b = a \times \text{sen}\beta = a \times \cos\gamma$ $b = c \times \text{tg}\beta = c \times \cot\gamma$ $c = a \times \text{sen}\gamma = a \times \cos\beta$ $c = b \times \text{tg}\gamma = b \times \cot\beta$
---	---